ΤΡΙΤΗ 18 ΜΑΙΟΥ 2021 - ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΛΟΓΙΑ.

Z-τεστ: $x_1, \dots, x_n \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2: γνωστό. $H_0: \mu = \mu_0$ (μ_0 γν.) $H_a: \mu = \mu_a$ (μ_a γν.) $\mu_a > \mu_0$

Η Σ.Σ.Τ. είναι $\bar{x}$ με κατανομή $N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$ υπό H_0 και κ.π. $\bar{x} \geq \mu_0 + z_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ή ισοδύναμα: Η Σ.Σ.Τ είναι $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ με κατανομή $N(0,1)$ υπό H_0 και κ.π. $z \geq z_a$

Ισχύς του Z-τεστ: $\gamma = 1 - \beta = 1 - P(\text{αποδ. } H_0 \mid H_a \text{ αληθής}) = P(\text{απορ } H_0 \mid H_a \text{ αληθής}) =$

$$= P\left(\bar{x} \geq \mu_0 + z_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,\middle|\, x_1, \dots, x_n \sim N(\mu_a, \sigma^2)\right) = P\left(\bar{x} \geq \mu_0 + z_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,\middle|\, \bar{x} \sim N\left(\mu_a, \frac{\sigma^2}{n}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \gamma = P\left(\frac{\bar{x} - \mu_a}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{\mu_0 + z_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \mu_a}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(z \geq z_a + \frac{\mu_0 - \mu_a}{\sigma/\sqrt{n}}\right), \quad z \sim N(0,1)$$

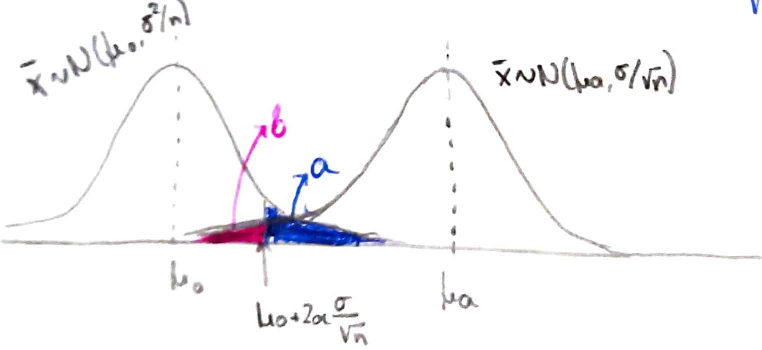
αθροιστική

$$= 1 - P\left(z \leq z_a + \frac{\mu_0 - \mu_a}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(z_a + \frac{\mu_0 - \mu_a}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

Παρατήρηση Οι πιθανότητες α και β δεν μπορούν να ελαχιστοποιηθούν ταυτόχρονα.

$\alpha = P(\text{απορ } H_0 \mid H_0 \text{ αληθής}) = P\left(\bar{x} \geq \mu_0 + z_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,\middle|\, \bar{x} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)\right)$ → σφάλμα τύπου I

$\beta = P(\text{αποδ } H_0 \mid H_a \text{ αληθής}) = P\left(\bar{x} \leq \mu_0 + z_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,\middle|\, \bar{x} \sim N\left(\mu_a, \frac{\sigma^2}{n}\right)\right)$ → σφάλμα τύπου II



Παράδειγμα Έστω τ.δ. $x_1, \dots, x_n$ από $N(\mu, \sigma^2)$ σ^2 γνωστό. Να κατασκευασθεί το Ι-τεστ για τον έλεγχο: $H_0: \mu = \mu_0$ (μ_0 γνωστό) έναντι $H_a: \mu = \mu_a$ (μ_a γν.), $\mu_a < \mu_0$

Λύση

Η Ι-κ.π. είναι: $\frac{L_0}{L_a} \leq k$, όπου L_0 → η πιθανοφάνεια υπό H_0 και

L_a → η πιθανοφάνεια υπό την H_a

όπου $L = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}$

$$\frac{L_0}{L_a} \le k \Rightarrow \dots \Rightarrow 2(\mu_a-\mu_0)\sum_{i=1}^{n} x_i \ge -2\sigma^2 \log k + n(\mu_a^2-\mu_0^2)$$

$$\xRightarrow{\mu_a<\mu_0} \sum_{i=1}^{n} x_i \le \frac{-2\sigma^2\log k + n(\mu_a^2-\mu_0^2)}{2(\mu_a-\mu_0)} \Rightarrow \bar{x} \le \frac{-2\sigma^2\log k + n(\mu_a^2-\mu_0^2)}{2n(\mu_a-\mu_0)} = k'$$

Εύρεση του κρίσιμου σημείου k':

$\alpha = P(\text{απορ } H_0 \mid H_0 \text{ αληθής}) = P\left(\bar{x} \le k' \mid \bar{x} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})\right)$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow k' = \mu_0 - z_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

z-τεστ: $x_1,\dots,x_n$, $N(\mu,\sigma^2)$, σ^2 γνωστό $H_0: \mu=\mu_0$ (μ_0 γν.) $H_a: \mu=\mu_a$ (μ_a γν) $\mu_a<\mu_0$

Η Σ.Σ.Τ. είναι $\bar{x}$ με κατανομή $N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$ υπό H_0 και κ.π. $\bar{x} \le \mu_0 - z_a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ή ισοδύναμα: Η Σ.Σ.Τ. είναι $z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ με κατανομή $N(0,1)$ υπό την H_0 και

κ.π. $z \le -z_a$.

Μεθοδολογία Neyman-Pearson για κατασκευή ΟΙ-τεστ (H_0 απλή έναντι σύνθετης H_a)

Έστω τ.δ. $x_1,\dots,x_n$ από $f(x,\theta)$, $\theta\in\Theta\subseteq\mathbb{R}$. Έστω μια απλή μηδενική $H_0: \theta=\theta_0$ και μια σύνθετη εναλλακτική της μορφής: $H_a: \theta>\theta_0$ ή $H_a: \theta<\theta_0$ ή $H_a: \theta\ne\theta_0$ με $\theta_0\in\Theta$, γνωστό. Έστω επίσης, ότι το ισχυρότατο τεστ για τον έλεγχο της απλής $H_0: \theta=\theta_0$, έναντι της απλής $H_a^*: \theta=\theta_a$, με θ_a να ικανοποιεί την H_a, είναι ίδια για κάθε $\theta_a \in H_a$, με $\theta_a\in\Theta$. Τότε, το τεστ αυτό είναι το ΟΙ-τεστ για τον αρχικό έλεγχο.

Παράδειγμα: έστω τ.δ. $x_1,\dots,x_n$ από $N(\mu,\sigma^2)$, σ^2 γνωστό. Να κατασκευασθεί το ΟΙ-τεστ για τον έλεγχο: $H_0: \mu=\mu_0$ (μ_0 γνωστό) έναντι της $H_a: \mu>\mu_0$

Θεωρούμε τις υποθέσεις $H_0: \mu=\mu_0$ (μ_0 γνωστό) έναντι $H_a^*: \mu=\mu_a$ ($\mu_a>\mu_0$).

Το Ι-τεστ για τον έλεγχο της H_0 έναντι της H_a^* (το έχουμε κατασκευάσει και είναι το z-τεστ) έχει Σ.Σ.Τ την $z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ με κατανομή $N(0,1)$

υπό την H_0 και κ.π. με ε.σ. α την $Z \geq Z_\alpha$

Επειδή το I-αυτό τεστ δεν εξαρτάται από το λ_a της νέας εναλλακτικής H_a^* είναι και το ΟΙ-τεστ για τον αρχικό έλεγχο.

Παράδειγμα: Έστω τ.δ. $x_1, \dots, x_n$ από Εκθ(λ), $\lambda > 0$. Να κατασκευασθεί ΟΙ-τεστ για τον έλεγχο της $H_0: \lambda = \lambda_0$, λ_0 γνωστό, έναντι $H_a: \lambda > \lambda_0$

Θεωρούμε το ζεύγος υποθέσεων $H_0: \lambda = \lambda_0$ (λ_0 γνωστό), έναντι $H_a^*: \lambda = \lambda_a$ ($\lambda_a > \lambda_0$) και κατασκευάζουμε το I-τεστ για τον έλεγχο της H_0 έναντι της H_a^*

I-τεστ: κ.π. $\dfrac{L_0}{L_a} \leq k$

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$L_0 = \lambda_0^n e^{-\lambda_0 \sum x_i}, \quad L_a = \lambda_a^n e^{-\lambda_a \sum x_i}$$

$$\frac{L_0}{L_a} \leq k \Rightarrow \frac{\lambda_0^n e^{-\lambda_0 \sum x_i}}{\lambda_a^n e^{-\lambda_a \sum x_i}} \leq k \Rightarrow e^{-(\lambda_0 - \lambda_a)\sum x_i} \leq \frac{\lambda_a^n}{\lambda_0^n} k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(\lambda_0 - \lambda_a)\sum x_i \leq \log \frac{\lambda_a^n}{\lambda_0^n} k \Rightarrow (\lambda_a - \lambda_0)\sum x_i \leq \log \frac{\lambda_a^n}{\lambda_0^n} k$$

$$\xRightarrow{\lambda_a > \lambda} \sum x_i \leq \frac{\log \frac{\lambda_a^n}{\lambda_0^n} k}{\lambda_a - \lambda_0} = k'$$

Άρα, η I-κ.π. είναι: $\sum x_i \leq k'$.

Υπολογισμός κ.σ. k'

$\alpha = P(\text{Απορ. } H_0 \mid H_0 \text{ αληθ.}) = P\left(\sum x_i \leq k' \mid x_1, \dots, x_n \sim \text{Εκθ}(\lambda_0)\right)$ (*)

Αλλά, $x_i \overset{H_0}{\sim} \text{Εκθ}(\lambda_0) \equiv G(1, \frac{1}{\lambda_0})$ ⇒ από την μέθοδο της ροπογεννήτριας (1ο μάθημα)

$$\Rightarrow \sum x_i \sim G\left(n, \frac{1}{\lambda_0}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{(1/\lambda_0)^n \Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda_0 x}$$

$$(*) \Rightarrow \alpha = \int_0^{k'} \frac{1}{(1/\lambda_0)^n \Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda_0 x} \, dx \rightarrow$$

→ Αριθμητικά το k' υπολογίζεται από την λύση της εξίσωσης αυτής και προφανώς το k' δεν εξαρτάται από το λ_a της H_a^*.

Άρα το Ι-τεστ για έλεγχο H_0 έναντι H_a^* έχει Σ.Σ.Τ την $\sum_{i=1}^{n} x_i$ με κατανομή $G(n, \frac{1}{\lambda_0})$ υπό την H_0 και κ.π. $\Sigma x_i \leq k'$ με k' να υπολογίζεται από την (αριθμητική) λύση της εξίσωσης $\alpha = \int_0^{k'} \frac{1}{(1/\lambda_0)^n \Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda_0 x} dx$

Παρατηρούμε ότι η Ι-κ.π. δεν εξαρτάται από το λ_a. Άρα αυτό είναι το ΟΙ-τεστ για τον αρχικό έλεγχο

Καταλήξαμε στη ΣΣΤ την $\Sigma x_i \sim G(n, \frac{1}{\lambda_0})$ υπό την H_0

Θεωρώ την ΣΣΤ $T = 2\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} x_i$

Με αλλαγή μεταβλητών δείχνεται ότι T έχει πυκνότητα $\frac{1}{2^n \Gamma(n)} t^{n-1} e^{-t/2}$, $t>0$

δηλαδή $T \sim G(n, 2)$.

$\left.\begin{array}{l} \\ \underline{\text{Αλλά}} \quad G(k, \lambda) = \frac{\lambda}{2} \chi^2_{2k} \end{array}\right\} T \sim \chi^2_{2n}$

$\alpha = P(\text{απορ } H_0 \mid H_0 \text{ αληθ}) = P(\Sigma x_i \leq k' \mid \Sigma x_i \sim G(n, \frac{1}{\lambda})) = P(2\lambda_0 \Sigma x_i \leq \underbrace{2\lambda_0 k'}_{k''} \mid \Sigma x_i \sim G(n, \frac{1}{\lambda}))$

$= P(T \leq k'' \mid T \sim \chi^2_{2n}) = P(\chi^2_{2n} \leq k'') \Rightarrow P(\chi^2_{2n} \geq k'') = 1 - \alpha$

$\Rightarrow k'' = \chi^2_{2n, 1-\alpha}$

Το Ι-τεστ για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης H_0 $\lambda = \lambda_0$ έναντι της εναλλακτικής H_a^*: $\lambda = \lambda_a$ $(\lambda_a > \lambda_0)$ έχει ΣΣΤ την $T = 2\lambda_0 \Sigma x_i$ με κατανομή χ^2_{2n} υπό την H_0 και κ.π. $T = 2\lambda_0 \Sigma x_i \leq \chi^2_{2n, 1-\alpha}$.

Επειδή αυτό το Ι-τεστ δεν εξαρτάται από το λ_a της H_a^* είναι και το ΟΙ-τεστ για τον αρχικό έλεγχο της H_0: $\lambda = \lambda_0$ έναντι H_a: $\lambda > \lambda_0$

Άσκηση σε ΟΙ-τεστ Έστω τ.δ. $x_1,\dots,x_n$ από $f(x,\theta)=\theta^2 x e^{-\theta x}$, $x>0$, $\theta>0$

$\sim G(2, 1/\theta)$

Να κατασκευαστεί ΟΙ-τεστ για τον έλεγχο $H_0: \theta=\theta_0$ γνωστό, έναντι $H_1: \theta>\theta_0$